

Przedmowa

Niniejszy zbiór esejów opracowany został w ramach projektu badawczego NCN nr 2015/17/B/HS1/02232 *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*. Zawiera cztery dotąd niepublikowane eseje napisane w trakcie trwania projektu:

Zasada permanencji form. Omawiam znaczenie sformułowanej w XIX wieku zasady heurystycznej znanej pod nazwą *zasada permanencji form*. Staram się pokazać, jaką rolę odegrała w rozwoju matematyki. Zastanawiam się nad jej ewentualną użytecznością we współczesnych badaniach logicznych. Dyskutuję krótko jej rolę w dydaktyce matematyki.

Odkrywanie czy tworzenie? Pytanie o to, czy matematyka jest tworzona, czy odkrywana, stale powraca w refleksji filozoficznej nad matematyką. W tym eseju zastanawiam się nad związkami tego pytania z innymi problemami ontologii oraz epistemologii matematyki. Deklaruję, które z przyjmowanych stanowisk są mi bliskie. Dodaję uwagi dotyczące miary dostępności poznawczej do obiektów matematyki.

O błędzeniu w matematyce. Omawiam niektóre sytuacje z dziejów matematyki, w których mieliśmy do czynienia z różnego typu błędami: nietrafnymi stwierdzeniami, niekompletnymi bądź błędnymi dowodami, deklarowanymi przekonaniem za słusnością hipotez, które okazały się nieprawdziwe itp. Wskazuję na korzyści, które uzyskano, diagnozując tego typu błędy. Dodaję krótki komentarz dydaktyczny.

Zagadki matematyczne w dydaktyce. Omawiam treść oraz sposób prowadzenia wykładu *Zagadki*, poświęconego matematycznym metodom rozwiązywania problemów i przeznaczony dla słuchaczy studiów kognitywistycznych. Celem wykładu jest wykształcenie u studentów umiejętności rozwiązywania problemów metodami matematycznymi, poprzez nakłonienie ich do spontanicznej intelektualnej kreatywności, ujarzmianej jedynie zasadami matematycznej poprawności. Omawiam zagadki matematyczne, których rozwiązania ukazują złudność bezrefleksyjnych przekonań intuicyjnych, żywionych na podstawie doświadczenia potocznego lub wspieranych jedynie myśleniem życzeniowym. Często ważniejszy od samego rozwiązania zagadki jest sposób dochodzenia do niego. Istotne są zatem pomysły, metody, techniki, heurystyki itp. stosowane w rozwiązywaniu zagadek. Wspólnie ze studentami przy-

glądamy się, w jaki sposób myśl poczęta przez postawienie zagadki rozwija się w kierunku podania jej rozwiązania. Podaję przykłady takich problemów, z krótkimi komentarzami. Dla wybranych zagadek podaję szkic rozwiązania. Oprócz zagadek czysto matematycznych wspominam także o innych typach problemów: zagadkach logicznych, paradoksach, sofizmatach, iluzjach.

Angielska wersja eseju o zasadzie permanencji form przyjęta została do druku w *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* i ukaże się w tomie 11 tego czasopisma.

Eseje w tym tomie są rozszerzonymi wersjami odczytów wygłoszonych na kilkunastu konferencjach:

1. Zasada permanencji form

- (a) *Zasada permanencji form*. 65 Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 5–6 listopada 2019.
- (b) *Uwagi o zasadzie permanencji form*. Seminarium Zakładu Logiki i Kognitywistyki UAM, Poznań, 30 października 2019.

2. Odkrywanie czy tworzenie?

- (a) *Agnostycyzm matematyczny*. VI Konferencja Filozofia Matematyki i Informatyki, Wydział Matematyki i Informatyki UAM, Poznań, 19–20 października 2018.
- (b) *On the invention-discovery dilemma*. Applications of Algebra in Logic and Computer Science, XXII, Zakopane, 5–11 marca 2018.
- (c) *Stopnie dostępności obiektów matematycznych*. Problem granic w filozofii i nauce XVIII, Instytut Filozofii i Instytut Fizyki, Uniwersytet Śląski, Katowice, 22 listopada 2017.
- (d) *Dostęp do obiektów matematycznych*. 63 Krakowska Konferencja Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 9–10 listopada 2017.
- (e) *Cognitive accessibility of mathematical objects*. Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics, XXII, Szklarska Poręba, 8–13 maja 2017.

3. O błędzeniu w matematyce

- (a) *Famous mistakes in mathematics*. Applications of Algebra in Logic and Computer Science, XX, Zakopane, 7–13 marca 2016.

- (b) *O błędzeniu w matematyce*. 13 ArgDiaP „Siła argumentu: racja, przekonanie, konsensus”, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 20–21 listopada 2015.
- (c) *Błędy matematyczne*. 61 Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 20–21 października 2015.
- (d) *O błędzeniu w matematyce*. Seminarium Zakładu Logiki i Kognitywistyki UAM, Poznań, 14 października 2015.

4. Zagadki matematyczne w dydaktyce

- (a) *Mathematical therapy (for adults)*. Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics, XX, Szklarska Poręba, 4–8 maja 2015.
- (b) *Paradox resolution as a didactic tool*. Mathematical Transgressions, Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN, Kraków, 15–19 marca 2015.
- (c) *Odyssey of the mathematical mind*. Applications of Algebra in Logic and Computer Science, XIX, Zakopane, 9–15 marca 2015.
- (d) *Matematyka i Humanistki*. IV Konferencja z Filozofii Matematyki i Informatyki, UAM, Poznań, 5–6 grudnia 2014.
- (e) *Urok zagadek matematycznych*. Spotkanie Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Młodzieżowego Towarzystwa Przyjaciół Nauk i Sztuk w Centrum Młodzieży w Krakowie im. dr. Henryka Jordana, Kraków, 24 października 2013.
- (f) *Zagadki matematyczne*. 59 Konferencja Historii Logiki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 22–23 października 2013 roku.
- (g) *Enigmatologia zamiast katechezy*. Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM, Poznań, 16 października 2013.
- (h) *Wesołe zagadki*. Spotkanie Grupy Logiki, Języka i Informacji, Uniwersytet Opolski, Opole, 14 maja 2013.

Projekt badawczy *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne* dotyczył pojęcia modelu zamierzonego teorii matematycznej oraz aksjomatów ekstremalnych formułowanych w celu jednoznacznej charakterystyki takich modeli. Przykładami aksjomatów tego typu są m.in.: aksjomat zupełności w *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta, aksjomat ciągłości w algebrze i analizie, aksjomat indukcji w arytmetyce, aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości (aksjomat ograniczenia Fraenkla, aksjomat konstruowalności Gödla, aksjomat kanoniczności Suszki) oraz aksjomaty istnienia

dużych liczb kardynalnych. Problematyce tej poświęciłem monografię *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects* (Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań 2019).

Niniejsze eseje nawiązują do trzeciego aspektu wymienionego w projekcie. Staram się przedstawić myślenie matematyczne zarówno w odniesieniu do twórczości profesjonalnych matematyków (pierwsze trzy eseje), jak też w odniesieniu do kształtowania takiego myślenia uczniów i studentów (czwarty esej).

W trakcie trwania projektu powstały inne jeszcze eseje, poświęcone m.in.: intuicji matematycznej, stopniom dostępności do obiektów matematycznych, krytycznym uwagom dotyczącym koncepcji matematyki ucieleśnionej, obiektom patologicznym w matematyce.

Eseje adresowane są przede wszystkim do przedstawicieli nauk kognitywnych, interesujących się poznaniem matematycznym. Dla samych matematyków poruszana problematyka jest z pewnością dobrze znana i trudno powiedzieć, czy ich zaciekawi. Starałem się unikać ogólnikowego filozofowania, skupiając się na przedstawieniu konkretnych sytuacji, w których można mówić o specyfice myślenia matematycznego.

Projekt 2015/17/B/HS1/02232 realizowany był w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM (Wydział Psychologii i Kognitywistyki UAM). Jestem bardzo wdzięczny Koleżankom i Kolegom z tego znakomitego zespołu za życzliwe przyjęcie do swojego grona leciwego już wszak człeka. Kompetentnej oraz bezinteresownej pomocy w składzie w systemie \LaTeX zarówno tego tomu, jak i wspomnianej wyżej książki *Extremal axioms* udzielał wielokrotnie Pan prof. Paweł Łupkowski, za co jestem mu wielce wdzięczny. Pani mgr Arlecie Borowiak z Centrum Wsparcia Projektów UAM uprzejmie dziękuję za bezcenne profesjonalne wskazówki dotyczące zarządzania projektem. Pani prof. Zofii Kostrzyckiej dziękuję za istotne uwagi przekazane w recenzji wydawniczej, a Panu redaktorowi Michałowi Staniszewskiemu za współpracę przy redakcji tego tomu.